L2-MPI: Examen d'électromagnétisme: 9/1/2014. Corrigé

Ex1 a) Le dipôle Electrostatique.

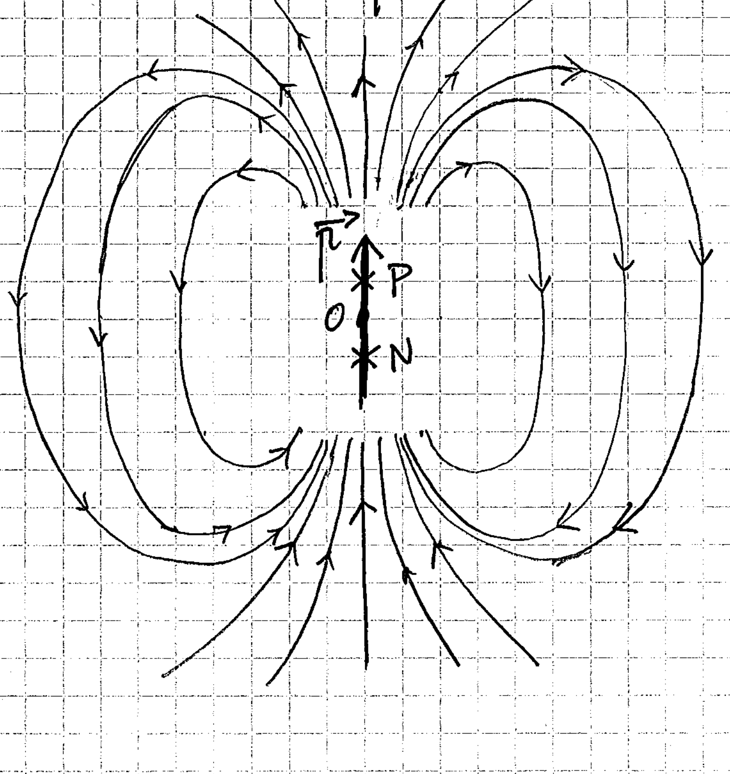
Définition un dipôle électrostatique est un ensemble de charges électriques dont le barycentre des charges négatives N et le barycentre des charges positives P ne sont pas confondus

soit $+q$ la charge positive total
" $-q$ " négative totale

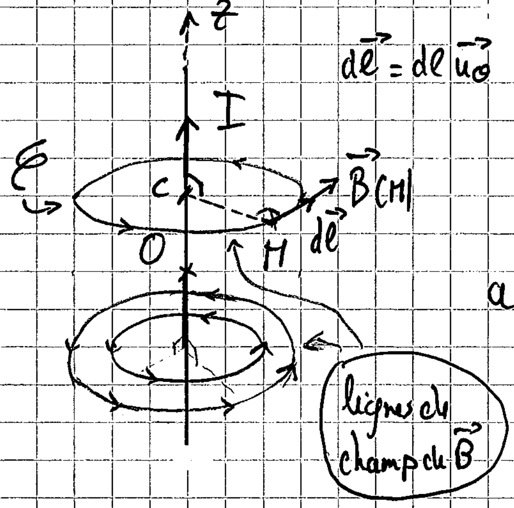
le moment dipôlaire est $\vec{p} = q\,\vec{NP}$

Approximation dipolaire : la distance NP est très petite devant les autres distances du problème.

Lignes de champ électrique créées par un dipôle dans l'approximation dipôlaire (loin du dipôle) :



Ex2: a) Fil rectiligne, infini, parcouru par un courant I



Coordonnées cylindriques d'axe (Oz)
(Oz) confondu avec le fil.
I dans le sens de $\vec{u_z}$

a1) $\forall M \in$ espace, le plan π contenant (Oz) et M est plan de symétrie de la distribution de courant $\Rightarrow \vec{B}(M) \perp$ ce plan
$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r,\theta,z)\,\vec{u_\theta}$

Invariance de la distribution de courant par translation $/\!/ (Oz) \Rightarrow B$ ne dépend pas de z
" " " " " rotation autour de $(Oz) \Rightarrow B$ " " θ

ainsi $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u_\theta}$ avec $r = r(M) = CM$
C = projection $\perp$ de M sur (Oz)

a.2) Calcul de $\vec{B}(M)$ en utilisant le th. d'Ampère.
Soit le cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon r : $M \in \mathcal{C}$

$$\oint_{P\in\mathcal{C}} \vec{B}(P)\cdot\vec{dl} = \mu_0\, I_{\text{enlacé par } \mathcal{C}} = \mu_0 I$$

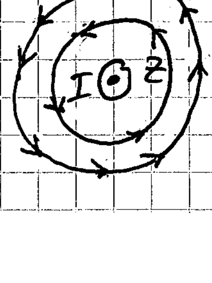
$$\Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}} B(r)\,\vec{u_\theta}\cdot dl\,\vec{u_\theta} = \mu_0 I \quad \text{avec } r = r(M)$$

$$\Leftrightarrow B(r)\oint_{\mathcal{C}} dl = \mu_0 I$$

$$\Leftrightarrow B(r)\, 2\pi r = \mu_0 I$$

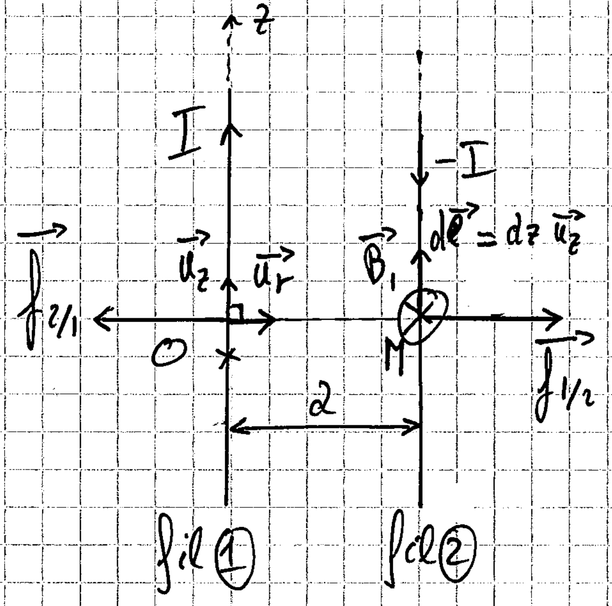
donc $\boxed{\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2 r \pi}\,\vec{u_\theta}}$

a.3) Lignes de champ de $\vec{B}$ sont les cercles centrés sur (Oz), orientés par $\vec{B}$



voir aussi 1er schéma

b) 2 fils //, ∞, rectilignes parcourus par I et -I



b 1) Force du fil ① sur le fil ②

$$\vec{F_{1/2}} = \int_{M \in \text{fil } 2} I\, \vec{dl}(P) \wedge \vec{B_1}(M)$$

Force de Laplace

avec $\vec{B_1}(M)$ le champ créé par I dans le fil ① en $M \in$ fil ②

Soit une portion de fil ② de longueur L : la force de ① sur la portion L de fil ② est

$$\vec{F_{1/2,L}} = \int_{z=0}^{z=L} -I\, dz \wedge \frac{\mu_0 I}{2r\pi}\vec{u_\theta}$$

(question a.3) avec r = d)

$$= \frac{I^2 \mu_0}{2d} L\, \vec{u_r}$$

donc la force par unité de longueur de ① sur ② est $\boxed{\vec{f_{1/2}} = \dfrac{I^2 \mu_0}{2d\pi}\vec{u_r}}$

Remarque. " " ② sur ① " $\vec{f_{2/1}} = -\vec{f_{1/2}}$ (action réciproque)

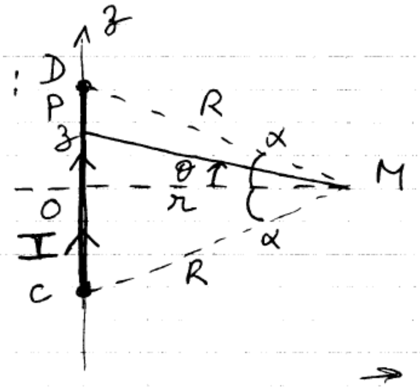
b2) Pour avoir $\|\vec{f_{12}}\| = 2\cdot 10^{-7}$ N il faut :

$$2\cdot 10^{-7} = \frac{I^2\, 4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \times 1} \quad \text{avec } d = 1\text{ m}$$

soit $\underline{\underline{I = 1\,A}}$ (ou $I = -1A$)

Cette expérience a permis de définir l'unité de courant : l'ampère.

Ex. 3



a) loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{CD} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

avec $\vec{dl} = dz\,\vec{u_z}$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -z\vec{u_z} + r\vec{u_r}$$

$$\rightarrow \vec{dl} \wedge \vec{PM} = dz\,\vec{u_z} \wedge (-z\vec{u_z} + r\vec{u_r}) = r\,dz\,\vec{u_z} \wedge \vec{u_r} = r\,dz\,\vec{u_\theta}$$

et $PM^2 = r^2 + z^2 \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{u_\theta}$

chg^t variable $z \to \theta$: $z = r\tan\theta \rightarrow dz = \frac{r}{\cos^2\theta}\,d\theta$

et $PM = \frac{r}{\cos\theta}$

$$\rightarrow \int_{-a}^{a} \frac{dz}{PM^3} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{r\,d\theta}{\cos^2\theta}\,\frac{\cos^3\theta}{r^3} = \frac{1}{r^2}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}\,\vec{u_\theta}$$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sin\alpha\,\vec{u_\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\tan\alpha\,\vec{u_\theta}}$$ car $r = R\cos\alpha$

b) d'après th. de superposition, chp créé par polygône en M :

$$\vec{B}_{poly}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{B_i}(M) \quad \text{où } \vec{B_i}(M) = \text{chp créé par côté } i$$

or d'après a) $\vec{B_i}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\tan\alpha\,\vec{u_z}$ avec $n\,2\alpha = 2\pi$ (car régulier) $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{n}$

et $\vec{u_z} \perp$ polygône :

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{poly}(M) = n\,\vec{B_i}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi R}\tan\frac{\pi}{n}\,\vec{u_z}}$$

c) lorsque $n \to +\infty$, le polygône régulier tend vers cercle de rayon R

or lorsque $n \gg 1 \Rightarrow \frac{\pi}{n} \ll 1$ et $\tan\frac{\pi}{n} \simeq \frac{\pi}{n}$

$$\Rightarrow \text{lorsque } n \gg 1 : \boxed{\vec{B}_{polygône} \simeq \frac{\mu_0 n I}{2\pi R}\,\frac{\pi}{n}\,\vec{u_z} = \frac{\mu_0 I}{2R}\,\vec{u_z} = \vec{B}_{spire}}$$

Ex4

a) $[A] = [\rho][r] = \frac{[Q]}{L^3} L = \frac{[Q]}{L^2} \Rightarrow$ l'USI de A : $\boxed{C.m^{-2}}$

b) $\boxed{Q} = \iiint_{sphère} \rho(r)d\tau = A\int_0^R r\,dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$\boxed{= 2\pi A R^2}$

[bien homogène car $[2\pi A R^2] = [A]L^2 = [Q]$]

c) • Tous les plans contenant (OM) sont des plans de symétrie passant par M $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M)\vec{u_r}$

• La distribution de charges est invariante par rotation autour de O $\Rightarrow E(M) = E(r)$

On a donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}}$

d) Appliquons le th de Gauss sur sphère centre O, rayon r, S(r) (bien fermée)

$\oiint_{S(r)} \vec{E}(M).\vec{dS} = \frac{Q(S)}{\varepsilon_0}$

or $\oiint_{S(r)} \vec{E}(M).\vec{dS} = \oiint_{S(r)} E(r)\vec{u_r}.dS\vec{u_r} = E(r)\oiint_{S(r)} dS = E(r)\,4\pi r^2$

• $\underline{r \leq R}$ $\quad Q(S) = \iiint_{S(r)} \rho(r)d\tau = A\int_0^r r\,dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$= 2\pi A r^2$

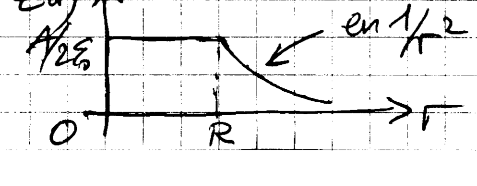
$\Rightarrow$ Gauss : $E(r)\,4\pi r^2 = \frac{2\pi A r^2}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r \leq R) = \frac{A}{2\varepsilon_0}\vec{u_r}}$

• $\underline{r \geq R}$ $\quad Q(S) = Q \Rightarrow$ Gauss : $4\pi r^2 E(r) = \frac{2\pi A R^2}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r \geq R) = \frac{AR^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u_r}}$

Rq : E(r) bien continu partout car charges volumiques



voir lignes de champ à la fin

e) $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(r) \Leftrightarrow d\phi = -\vec{E}(M)\cdot d\overrightarrow{OM}$

$= -E(r)\vec{u_r}\cdot d\overrightarrow{OM}$

$= -E(r)dr$

- $\underline{r \leq R}$ $\quad d\phi = -\frac{A}{2\varepsilon_0}dr \Rightarrow \phi(r) = -\frac{A}{2\varepsilon_0}r + C_1$
- $\underline{r \geq R}$ $\quad d\phi = -\frac{AR^2}{2\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \phi(r) = \frac{AR^2}{2\varepsilon_0 r} + C_2$

Or l'origine des potentiels est choisie à l'infini

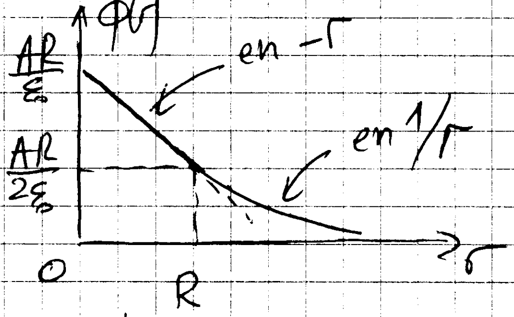
$\Rightarrow \phi(r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0$

et $\phi(r)$ doit être continu partout

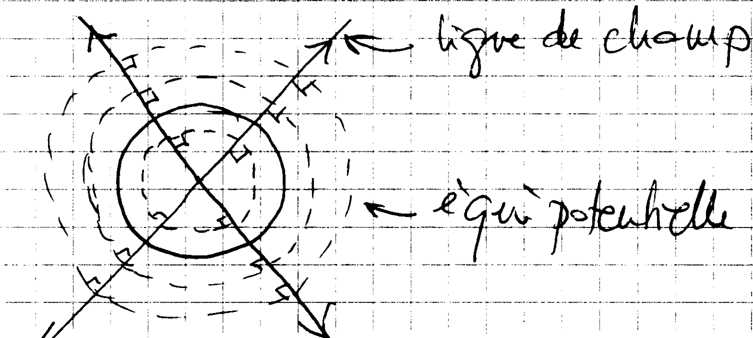
$\Rightarrow \phi(r=R^-) = \phi(r=R^+)$

$\Leftrightarrow -\frac{AR}{2\varepsilon_0} + C_1 = \frac{AR}{2\varepsilon_0} \Leftrightarrow C_1 = \frac{AR}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\phi(r\leq R) = \frac{A}{2\varepsilon_0}(2R - r)\\ \phi(r \geq R) = \frac{AR^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}\end{array}}$$



$\underline{Rq}$: la pente de $\phi(r)$ est continue partout car $\frac{d\phi}{dr} = -E(r)$ qui est continue partout.



- les lignes du champ $\vec{E}$ sont des <u>droites radiales</u> car $\vec{E} \parallel \vec{u_r}$
- les équipotentielles sont les surfaces à $r =$ cste car $\phi = \phi(r)$ c.à.d <u>des sphères de centre O</u>

$\underline{Rq}$: les équipotentielles sont bien $\perp$ aux lignes de champ